238	Le nombre π.	Approximation de Pi par la méthode des polygones réguliers d'Archimède.	Rombaldi De Biasi.
255	Algorithmes d'approximation du nombre π.		
256	Vitesse de convergence, accélération de convergence.		
406	Exemples de comport[t] asympt. de suites, rapidité de cv.		
433	Approximations du nombre π.		

Archimède a inventé, vers 250 avant J-C, une méthode originale pour le calcul de la longueur d'un cercle. Il encadre en effet cette valeur par le périmètre d'un polygone régulier inscrit dans ce cercle, et par le périmètre d'un polygone régulier exinscrit.

Approximation de π par la méthode d'Archimède des polygones réguliers.

1°) Considérons $a_n = n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$, pour tout n≥1. Mq la cv vers π est lente. (énoncé modifié – question 1 rajoutée – à retenir)

Pourquoi cette suite est-elle inutilisable telle quelle pour calculer une approximation du nombre π ?

2°) On introduit : $x_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$, pour tout n≥1. Mq cette suite converge vers π géométriquement de raison $\dfrac{1}{4}$.

3°) On l'accélère en posant $y_n = \dfrac{4x_{n+1} - x_n}{3}$, pour tout n≥1. Mq on a une convergence géométrique de raison $\dfrac{1}{16}$.

4°) Qu'obtient-on en itérant ce procédé ?

I. Outils

A. Formule d'Al-Kashi (ou « loi des cosinus », ou « théorème de Pythagore généralisé »). (De Biasi p.254)

Soit un triangle ABC, dans lequel on utilise les notations usuelles exposées sur la figure 1 : d'une part α, β et γ pour les angles et, d'autre part, *a*, *b* et *c* pour les longueurs des côtés respectivement opposés à ces angles.

Alors $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$

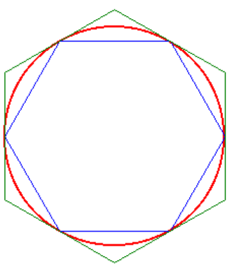
Démo :

$$c^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2 - 2\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} + \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2$$

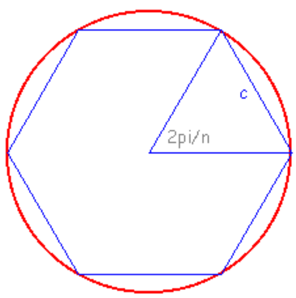
$$= CB^2 + CA^2 - 2CB.CA.\cos(\widehat{ACB}) = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$$

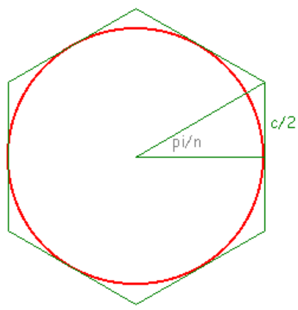
Il existe de nombreuses autre démonstrations, en particulier purement géométriques, dont l'une due à Al Kashi, une autre à Pythagore, etc...

B. Méthode d'Archimède des polygones réguliers. (pas de source)



Le périmètre du cercle est compris entre le périmètre de l'hexagone bleu et celui de l'hexagone en vert.





On se propose de calculer le périmètre d'un cercle de rayon 1.

Pour un polygone régulier à n côtés, l'angle au centre vaut $\dfrac{2\pi}{n}$. Pour le polygone inscrit, on a la figure ci-dessus.

Par la formule d'Al-Kashi, on a : $c^2 = 2\left(1 - \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)\right) = 4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$, soit $c = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

Pour le polygone exinscrit, on a la figure :

On a donc : $c = 2\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$. On en déduit que : $2\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \le \dfrac{2\pi}{n} \le 2\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$, d'où $n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \le \pi \le n\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$

II. Développement

1°). $a_n = n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$, convergence lente. (pas de source, à retenir)

$$a_n = n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \underset{0}{=} n\times\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\pi^3}{6}.\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)=\pi-\frac{\pi^3}{6}.\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \to \pi$$

De plus, $e_n = x_n - \pi = -\frac{\pi^3}{6}.\left(\frac{1}{n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

D'où $\frac{|e_n|}{|e_{n+1}|} \sim \frac{n^2}{n^2+1} \to 1$, donc la convergence est lente.

<u>Problème</u> : on utilise π pour calculer les éléments de la suite, mais comme c'est π que l'on souhaite approcher, la définition est inutilisable. En s'inspirant de l'idée développée au paragraphe II.B (256), on va considérer les termes d'indices 2^n.

2°). $x_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$, convergence géométrique de raison 1/4. (Rombaldi + De Biasi p.141)

Pour n∈ℕ*, considérant le polygone régulier à 2n côtés, on pose : (tend vers π comme sous-suite de la précédente)

$$x_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \to \pi$$

On a : $\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2} = \frac{1-\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}}{2} = \frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{x_n}{2^n}\right)^2}}{2}$,

Donc $x_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{x_n}{2^n}\right)^2}} = \sqrt{2}.2^n.\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{x_n}{2^n}\right)^2}}$,

Et cette expression permet un calcul itératif des termes de la suite, sans utiliser le nombre π que l'on cherche à approcher.

En utilisant le développement limité : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)$, il vient le développement asymptotique :

$$x_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!}\frac{1}{2^{2n}}+\frac{\pi^5}{5!}\frac{1}{2^{4n}}+o\left(\frac{1}{2^{4n}}\right) = \pi - \underbrace{\left(\frac{\pi^3}{3!}\right)}_{\beta}\underbrace{\left(\frac{1}{2^2}\right)}_{\lambda}^n + \underbrace{\left(\frac{\pi^5}{5!}\right)}_{\gamma}\underbrace{\left(\frac{1}{2^4}\right)}_{\mu}^n + o\left(\frac{1}{2^{4n}}\right) = \pi + \beta.\lambda^n + \gamma.\mu^n + o(\mu^n)$$

Où β, γ sont inconnus, car ils contiennent π que l'on cherche à approximer, et $\lambda = \frac{1}{4}$ et $\mu = \frac{1}{16}$.

La suite converge bien vers π, géométriquement de raison $\lambda = \frac{1}{4}$.

3°). $y_n = \frac{4x_{n+1}-x_n}{3}$, convergence géométrique de raison 1/16 : méthode d'acc° de Richardson. (Rombaldi)

On va introduire un barycentre de x_n et x_{n+1}, pondéré astucieusement pour éliminer β (i.e.une combinaison linéaire), et donc éliminer le facteur λ^n. Cela nous amènera à une cv. géométrique de raison μ (plus rapide).

$$x_n = \pi + \beta.\left(\frac{1}{4}\right)^n + \gamma.\left(\frac{1}{16}\right)^n + o\left(\left(\frac{1}{16}\right)^n\right)$$

$$x_{n+1} = \pi + \beta.\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{4}\right)^n + \gamma.\frac{1}{16}.\left(\frac{1}{16}\right)^n + o\left(\left(\frac{1}{16}\right)^{n+1}\right)$$

$$\underbrace{4x_{n+1}} = 4\pi + \underbrace{\beta.\left(\frac{1}{4}\right)^n} + \gamma.\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{16}\right)^n + o\left(\left(\frac{1}{16}\right)^{n+1}\right)$$, pour éliminer β dans la soustraction

$$4x_{n+1} - x_n = 3\pi + \gamma.\left(-\frac{3}{4}\right).\left(\frac{1}{16}\right)^n + o\left(\left(\frac{1}{16}\right)^n\right)$$, que l'on divise par 3 pour que ça tende encore vers π

$$y_n = \frac{4x_{n+1} - x_n}{3} = \pi + \underbrace{\gamma.\left(-\frac{1}{4}\right)}_{\gamma'}.\left(\frac{1}{16}\right)^n + o\left(\left(\frac{1}{16}\right)^n\right)$$

La suite obtenue tend vers π, géométriquement de raison 1/16.

On a accéléré la suite (x_n) pour obtenir une convergence géométrique de raison $\mu = \frac{1}{16}$ en posant : $y_n = \frac{4x_{n+1} - x_n}{3}$

4°). Itération de la méthode d'accélération de Richardson. (Rombaldi)

On a $x_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. En effectuant un DL en 0 de $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x}$ (où $x = \frac{1}{2^n}$), il vient (pour p∈ℕ*):

$\frac{\sin(\pi x)}{x} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \frac{\pi^{2j+1}}{(2j+1)!} x^{2j} + o\left(x^{2p+2}\right)$, d'où le développement asymptotique (en posant $x = \frac{1}{2^n}$) :

$$x_n = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \frac{\pi^{2j+1}}{(2j+1)!}\left(\frac{1}{2^n}\right)^{2j} + o\left(\left(\frac{1}{2^n}\right)^{2p+2}\right) = \pi\left(\sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \frac{\pi^{2j}}{(2j+1)!}\left(\frac{1}{2^n}\right)^{2j}\right) + o\left(\left(\frac{1}{2^n}\right)^{2p+2}\right)$$

donc $x_n = \pi + \sum_{j=1}^{p+1} \underbrace{(-1)^j \frac{\pi^{2j+1}}{(2j+1)!}}_{\beta_j} \underbrace{\left(\frac{1}{4^j}\right)}_{\lambda_j}^n + o\left(\left(\frac{1}{4^{p+1}}\right)^n\right)$.

En identifiant avec les notations générales: $x_n = \alpha + \sum_{j=1}^{p+1} \beta_j \lambda^n{}_j + o\left(\lambda_{p+1}{}^n\right)$, on a $\alpha = \pi$, $\beta_j = (-1)^j \frac{\pi^{2j+1}}{(2j+1)!}$ et $\lambda_j = \left(\frac{1}{4^j}\right)$.

Notons que les coefficients β_j sont inconnus, puisque l'on cherche à approcher π.

D'après les formules de récurrence $\begin{cases} x_{n,0} = x_n \\ x_{n,k} = \dfrac{x_{n+1,k-1} - \lambda_k x_{n,k-1}}{1 - \lambda_k} \end{cases}$ de la méthode de Richardson, il vient ici les suites accélératrice:

$\begin{cases} x_{n,0} = x_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) \\ x_{n,k} = \dfrac{x_{n+1,k-1} - \frac{1}{4^k} x_{n,k-1}}{1 - \frac{1}{4^k}} = \dfrac{4^k x_{n+1,k-1} - x_{n,k-1}}{4^k - 1} \end{cases}$ pour $k \in [\![1; p]\!]$ et $n \geq 1$. D'où: $\begin{cases} x_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) \\ x_{n,1} = \dfrac{4x_{n+1} - x_n}{3} \\ x_{n,2} = \dfrac{16x_{n+1,1} - x_{n,1}}{15} \end{cases}$

Si l'on pose $f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{x}$, et $f(x)=g(x^2)$, alors du DL $f(x)=\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j\dfrac{\pi^{2j+1}}{(2j+1)!}x^{2j}+o(x^{2p+2})$, on déduit en posant $t=x^2$: $g(t)=\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j\dfrac{\pi^{2j+1}}{(2j+1)!}.t^j+o(t^{p+1})=\underbrace{\pi}_{\alpha}+\sum_{j=1}^{p+1}\underbrace{(-1)^j\dfrac{\pi^{2j+1}}{(2j+1)!}}_{\beta_j}.\ t^j+o(t^{p+1})$,

on retrouve le "cas général" décrit dans le cours, avec $r=\dfrac{1}{4}$. En effet, $x_n=f\left(\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right)$.

On peut donc appliquer la formule générale de calcul d'équivalent de l'erreur, et il vient: $\pi-x_{n,k}\underset{\infty}{\sim}\dfrac{\pi^{2k+3}}{(2k+3)!}\dfrac{1}{2^{(2n+k)(k+1)}}$, d'où les évaluations d'erreurs:

$$\begin{cases}\pi-x_n\underset{\infty}{\sim}\dfrac{\pi^3}{6}\dfrac{1}{4^n}\\ \pi-x_{n,1}\underset{\infty}{\sim}\dfrac{\pi^5}{5!}\dfrac{4}{16^{n+1}}\\ \pi-x_{n,2}\underset{\infty}{\sim}\dfrac{\pi^7}{7!}\dfrac{1}{64^{n+1}}\end{cases}$$

Attention, le Rombaldi contient quelques erreurs d'indices, il faut vérifier les calculs.

On trouve les valeurs de quelques termes dans le De Biasi:

x_5 = 3,136 548 489 (précision 5.10^{-3})

$x_{4,2}$ = 3,141 582 936 (précision 10^{-5})

$x_{3,3}$ = 3,141 592 618 (précision 4.10^{-8})

$x_{2,4}$ = 3,141 592 653 (précision 10^{-9})

<u>Attention aux notations</u>: $x_{\text{n° du terme, n° de la suite}}$.